UAA 7 : Nombres complexes

Exercices supplémentaires

B. Vocabulaire, notations et propriétés

1. Mettre sous la forme $a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ les nombres suivants :

(1) $\dfrac{7}{i}$

(2) $(3+i)\dfrac{3-2i}{5-i}$

(3) $(1+i)^2$

(4) $\dfrac{3+6i}{3-4i}$

(5) $\left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2+\dfrac{3+6i}{3-4i}$

(6) $\dfrac{2+5i}{1-i}+\dfrac{2-5i}{1+i}$

(7) $\dfrac{5+2i}{1-2i}$

(8) $\left(\dfrac{1}{1-i}\right)^2$

2. Vérifie que $-8+2\sqrt{3}+i\left(12+4\sqrt{3}\right)=\left(1+\sqrt{3}+i2\sqrt{3}\right)^2$.

3. Résous les équations suivantes :

(1) $(1+i)z=1-i$

(2) $\dfrac{z-1}{z+1}=2i$

(3) $\overline{z}=2\overline{z}+1$

(4) $-\overline{z}=1+i$

(5) $\dfrac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}=2i$

(6) $\left(\overline{z}+1\right)\left(2+3\overline{z}-i\right)=0$

4. Détermine les nombres complexes z tels que $z.\overline{z}+3\left(z-\overline{z}\right)=13+18i$.

   Sol : $z=2+3i$ ou $z=-2+3i$

5. Soit z et w deux nombres complexes, vérifie les propriétés suivantes :

   (1) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$

   (2) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$

   (3) $\overline{z.w}=\overline{z}.\overline{w}$

   (4) $\overline{z^2}=\left(\overline{z}\right)^2$

6. Calcule les racines carrées de :

   (1) i

   (2) $3+4i$ *Sol* : $2+i$ et $-2-i$

   (3) $8-6i$

   (4) $15+8i$

7. Résous les équations suivantes dans $\mathbb{C}$; donne les solutions sous leur forme algébrique :

   (1) $z^2+z+1=0$ $S=\left\{\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2};\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right\}$

   (2) $z^2-(1+2i)z+i-1=0$

   (3) $z^2-\sqrt{3}z-i=0$

   (4) $4z^2-2z+1=0$

   (5) $z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0$

   (6) $z^2-iz-1-i=0$

   (7) $(1+4i)z^2-(2-3i)z+1-2i=0$

   (8) $4iz^2+(2-3i)z-5-2i=0$

   (9) $4z^2-(1-7i)z+3-2i=0$

   (10) $4z^2-3z+19=0$

(11) $\left(4-i\sqrt{5}\right)z^2-(1-7i)z+\sqrt{3}-i=0$

(12) $4z^2+(iz+2)^2=0$ $\qquad S=\left\{\frac{2i}{3};-2i\right\}$

(13) $iz^2+iz+(1+i)=0$ $\qquad S=\{i;-1-i\}$

(14) $\frac{3+i}{z+i}-\frac{1-3i}{z-i}=2(z-1)$ $\qquad S=\{1;1+i;-1-i\}$

(15) $iz^2+(5-2i)z+50=0$ $\qquad S=\left\{\frac{-9-5i}{2};\frac{13+15i}{2}\right\}$

(16) $z^4+3z^2+2=0$ (équation bicarrée) $\qquad S=\left\{\pm i;\pm\sqrt{2}i\right\}$

(17) $z^4-32z^2-144=0$ $\qquad S=\{\pm 6;\pm 2i\}$

8. Résous l'équation $\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^3+\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^2+\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)+1=0$. (*Mons, 2003*)

9. Résous l'équation $\left(2z^2-1\right)^3=\left(z^2+1\right)^3$. *(Ulg, 2003)*

10. Résous le système $\begin{cases}3z_1+z_2=2-5i\\ z_1-z_2=-2+i\end{cases}$.

Sol : $z_1=-i$ et $z_2=2-2i$

11. Résous le système $\begin{cases}3z_1+z_2=5+2i\\ -z_1+z_2=1-2i\end{cases}$.

Sol : $z_1=1+i$ et $z_2=2-i$

12.

C. Représentation géométrique d'un nombre complexe

1. Place, dans le plan gaussien, les points d'affixes suivantes : $z_1 = i$, $z_2 = 1 + i$ et $z_3 = -2 + 2i$.

2. Sans effectuer de calculs,

   (1) Lis l'affixe z_A du point *A*.

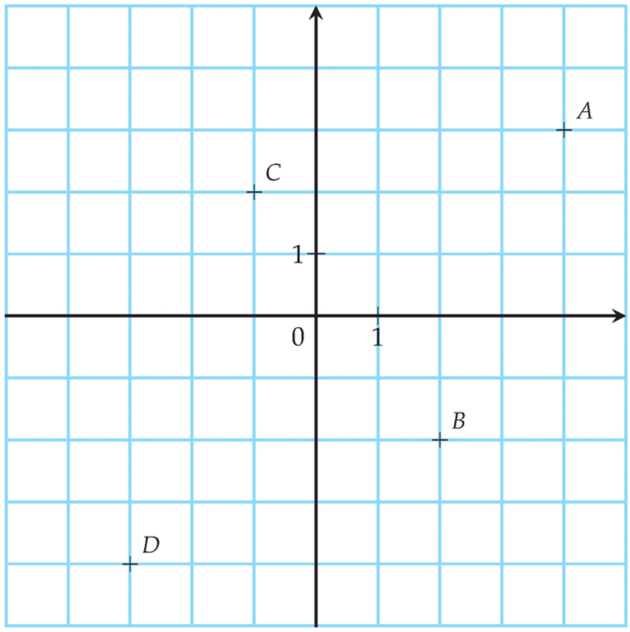
   (2) Construis le point dont l'affixe est $\overline{z_A}$.

   (3) Construis le point dont l'affixe est $-z_A$.

   (4) Construis le point dont l'affixe est $z_A + 2$.

   (5) Construis le point dont l'affixe est $z_A - i$

   (6) Mêmes questions pour les points *B*, *C* et *D*.



D. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

   (1) $z = 3+3i$

   (2) $z = -1-\sqrt{3}i$

   (3) $z = -\frac{4}{3}i$

   (4) $z = -2$

   (5) $z = (2+i)(3-5i)$

2. Mettre sous la forme $a+bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ les nombres suivants :

   (1) $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

   (2) $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$

   (3) Nombre de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$

3. Calcule $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2015}$.

4. Soit les nombres complexes $a = \sqrt{3}-i$, $b = 2-2i$ et $z = \frac{a^4}{b^3}$.

   (1) Donne le module et un argument de a, b, a^4 et b^3.

   (2) Donne la forme algébrique de a^4 et b^3, puis de z.

   (3) Calcule le module et un argument de z.

   (4) Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

5. Calcule le module et l'argument de $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et de $z_2 = 1-i$. Déduis-en le module et l'argument de $z = \frac{z_1}{z_2}$.

6. Calcule $\left(1+i\sqrt{3}\right)^5+\left(1-i\sqrt{3}\right)^5$ et $\left(1+i\sqrt{3}\right)^5-\left(1-i\sqrt{3}\right)^5$.

7. Pour quelles valeurs de $z\in\mathbb{C}$, a-t-on $|1+iz|=|1-iz|$?

E. Racines $n^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe

1. Calcule les racines cubiques de $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$.

2. Calcule les racines sixièmes de $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

3. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = \dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$.

4. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = \dfrac{1}{4}(-1+i)$ et montre qu'une seule de ses solutions a une puissance quatrième réelle.

5. Détermine les racines cubiques de $4\left(\sqrt{3}-i\right)$.

6. Calcule $\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4$.

7. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = -4\sqrt{2}+4i\sqrt{2}$.

8. Démontre, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et pour tout nombre $z \in \mathbb{C}$, on a : $(z-1)\left(1+z+z^2+z^3+\ldots+z^{n-1}\right) = z^n - 1$.

9. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = \overline{z}$.

10. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-1)^n = (z+1)^n$.

11. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^7 = 1$ et $z \neq 1$. Montre que $\dfrac{z}{1+z^2}+\dfrac{z^2}{1+z^4}+\dfrac{z^3}{1+z^6} = -2$.

F. Opérations dans $\mathbb{C}$ et géométrie plane

1. Dans le plan de Gauss, représente les points P d'affixe $p=2+i$ et Q d'affixe $q=1-2i$. Construis ensuite les points dont les affixes sont données ci-dessous et précise les transformations du plan utilisés.
   (1) $2p+q$
   (2) $p.q$
   (3) $(p-q)^2$

2. Dans le plan de Gauss d'origine O, on donne le point Z d'affixe $3-3i$. Détermine l'affixe du point Z', image du point Z par :
   (1) la rotation d'origine O et d'angle $315°$;
   (2) la rotation d'origine O et d'angle $-90°$ suivie de l'homothétie de centre O et de rapport -2.

3. Soit $z=3+4i$. Calcule zi, zi^2, zi^3 et zi^4. Représente ces valeurs dans le plan de Gauss. Que constates-tu géométriquement ?

4.

G. Applications

1. Détermine l'ensemble des nombres complexes z tels que :
   (1) $\dfrac{z-1}{z+1}$ soit un réel pur *Sol* : z doit être un réel pur
   (2) $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right|=1$
   (3) $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   (4) $|z-4i+3|=5$
   (5) $\dfrac{\overline{z}}{z}=4$
   (6) $z+\dfrac{1}{z}$ est imaginaire pur

2. Soit a et b deux nombres complexes de module 1 et tels que $ab \neq -1$, montre que $\dfrac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}$.

3. Détermine l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $\left|\overline{z}+i\right| = 5$.

   Sol : Il s'agit d'un cercle de centre $(0;1)$ et de rayon 5.

4. Détermine et représente l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la relation $\left|z-(3+2i)\right| = 1$.

   Sol : Il s'agit d'un cercle de centre $(3;2)$ et de rayon 1.

5.

H. Vrai ou faux ?

(1) $2i$ est plus grand que i.

Vrai Faux On ne peut pas savoir

(2)

I. Pour chercher

1. Soit u et v des nombres complexes non réels tels que $|u| = |v| = 1$ et $uv \neq -1$. Montre que $\dfrac{u+v}{1+uv}$ est réel.

2. Résous les systèmes suivants :

   (1) $\begin{cases} 3z + z' = 2-5i \\ z - z' = -2+i \end{cases}$

   (2) $\begin{cases} 3z + z' = 5+2i \\ -z + z' = 1-2i \end{cases}$

3. x est un nombre réel, z est le nombre complexe défini par $z = \dfrac{1+6ix}{1-2ix}$. M est l'image du nombre complexe z dans le plan de Gauss.

   (1) Calcule $|z+1|$.

   (2) Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z+1| = 2$ lorsque $x \in \mathbb{R}$?

4. Soit l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = z^3 + (1-5i)z^2 - 2(5+i)z + 8i$.

   (1) Démontre que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution qui est un nombre imaginaire pur que tu détermineras.

   (2) Déduis-en que $f(z)$ peut s'écrire sous la forme $f(z) = (z-2i)(z^2 + az + b)$ où a et b sont deux complexes à déterminer.

   (3) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$. Résous l'équation l'équation $a^2 = 8-6i$.

5. Vrai ou faux ? Pour chaque proposition indique si elle est vraie ou fausse et propose une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple.

   (1) Si $z + \overline{z} = 0$, alors $z = 0$.

   (2) Si $z + \dfrac{1}{z} = 0$, alors $z = i$ ou $z = -i$.

   (3) Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.

6. Résous l'équation $4z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 4 = 0$.

   Sol : $S = \{2; i; -i\}$

7. Vrai ou faux ?

   (1) L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-i| = |z+2i|$ est une droite parallèle à l'axe des réels. *Vrai*

   (2) Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$. Pour tout naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur. *Faux*

   (3) Soit z un nombre complexe non nul. Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z, alors $|i+z| = 1+|z|$. *Faux*

(4) Soit z un nombre complexe non nul. Si le module de z est égal à 1, alors $z^2 + \frac{1}{z^2}$ est un nombre réel. *Vrai*

(5) Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$. Alors $1 + j + j^2 = 0$. *Vrai*

(6) Pour tout entier naturel n, $(1+i)^{4n} = (-4)^n$. *Vrai*

(7)

8.